제 2 교시 수학 영역 [나형]

5지 선다형(1 ~ 21)

1. $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 의 부분집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 집합 A^C 의 모든 원소의 합은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

3. $\lim_{n \to \infty} \frac{n-3}{2n+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

4. 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_3 의 값은? [3점]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

5. 함수 $f(x)=2x+k$에 대하여 $f^{-1}(5)=1$일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

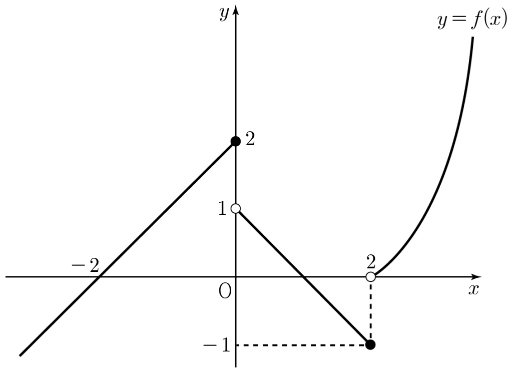
6. 명제

‘$x=a$이면 $x^2+6x-7=0$이다.’

가 참이 되기 위한 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to2+}f(x)+\lim_{x\to0-}f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

8. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 $\{1, 2\} \subset X$를 만족시키는 U의 모든 부분집합 X의 개수는? [3점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

9. 두 함수

$$f(x)=2x-1, \quad g(x)=x^2-1$$

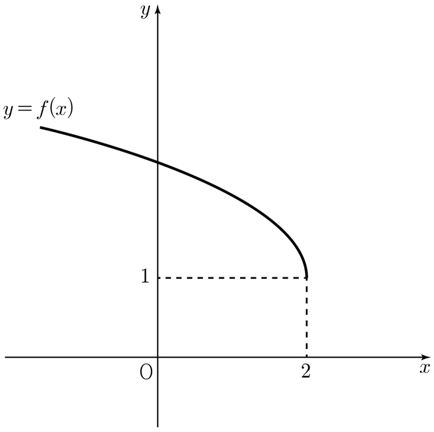
에 대하여 $(f \circ g)(a)=5$를 만족시키는 양수 a의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

10. $\log_2 5=a$, $\log_5 7=b$일 때, $(2^a)^b$의 값은? [3점]

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

11. 함수 $f(x)=\sqrt{-x+a}+b$의 그래프가 그림과 같을 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

12. $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+2)}\right\}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{5}{8}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{7}{8}$

13. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n에 대하여 $S_3=21$, $S_6=189$일 때, a_5의 값은? [3점]

① 45 ② 48 ③ 51 ④ 54 ⑤ 57

14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3}{k+1}+\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k+1}$ 의 값은? [4점]

① 340 ② 360 ③ 380 ④ 400 ⑤ 420

15. 함수 $y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}$ 의 그래프가 제4사분면을 지나도록 하는 모든 자연수 k의 개수는? [4점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

16. 수강생이 35명인 어느 학원에서 모든 수강생을 대상으로 세 종류의 자격증 A, B, C의 취득 여부를 조사하였다. 자격증 A, B, C를 취득한 수강생이 각각 21명, 18명, 15명이고, 어느 자격증도 취득하지 못한 수강생이 3명이다. 이 학원의 수강생 중에서 세 자격증 A, B, C를 모두 취득한 수강생이 없을 때, 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생의 수는? [4점]

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

17. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+\cdots+n)>n^2 \cdots\cdots (*)$$

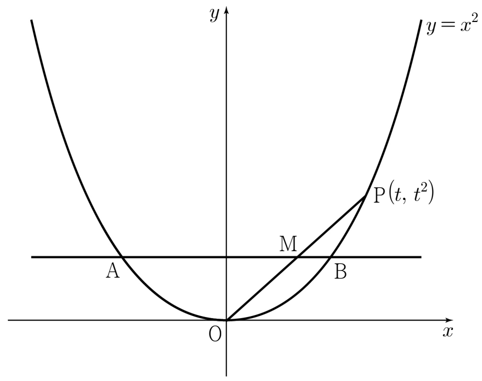
이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 과정이다.

> 주어진 식 $(*)$의 양변을 $\frac{n(n+1)}{2}$ 로 나누면
>
> $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1} \cdots\cdots ㉠$$
>
> 이다. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여
>
> (i) $n=2$일 때,
>
> (좌변)= $\boxed{(가)}$, (우변)= $\frac{4}{3}$ 이므로 ㉠이 성립한다.
>
> (ii) $n=k\ (k \geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
>
> $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1} \cdots\cdots ㉡$$
>
> 이다. ㉡의 양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면
>
> $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2k+1}{k+1}$$
>
> 이 성립한다. 한편,
>
> $$\frac{2k+1}{k+1}-\boxed{(나)}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$
>
> 이므로
>
> $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\boxed{(나)}$$
>
> 이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립하므로 $(*)$도 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(k)$라 할 때, $8p \times f(10)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

18. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$과 원점 O에 대하여 선분 OP의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나면서 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\lim_{t \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{OP}}}$ 의 값은? [4점]



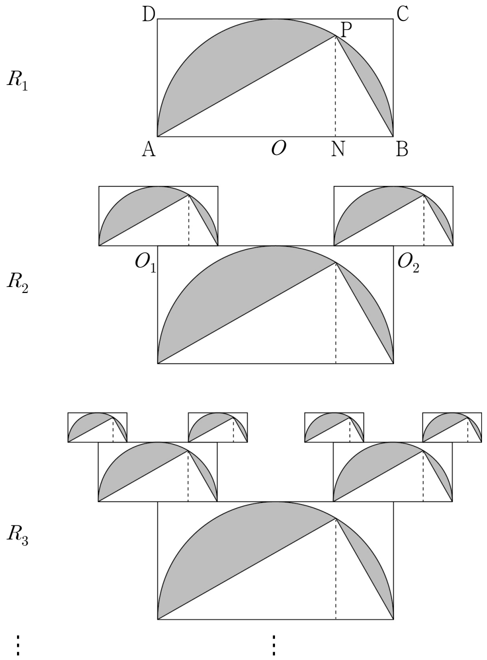
① 1 ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

19. 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O가 있다. 그림과 같이 선분 AB를 한 변으로 하고 반원 O에 외접하는 직사각형 ABCD를 그린다. 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 N이라 하고, 점 N을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 반원 O와 만나는 점을 P라 하자. 반원 O의 내부와 삼각형 ABP의 외부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 D를 중심으로 하고 지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$인 반원 O_1, 점 C를 중심으로 하고 지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$인 반원 O_2를 지름이 직선 DC 위에 있도록 그린다.

두 반원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $3(\pi-\sqrt{3})$　② $3(\pi-\sqrt{2})$　③ $3(\pi-1)$
④ $4(\pi-\sqrt{3})$　⑤ $4(\pi-\sqrt{2})$

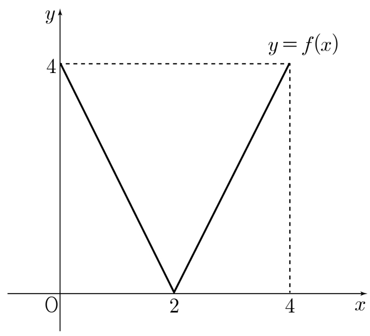
20. 함수

$$f(x)=|2x-4| \quad (0 \le x \le 4)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>
ㄱ. $f(f(1))=0$
ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은 8이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



21. 좌표평면에서 반지름의 길이가 t 인 원 $x^2+y^2=t^2$ 의 내부에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 예를 들어, $f(1)=1$ 이고 $f(\sqrt{2})=5$ 이다. $0<t<6$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(t)$가 불연속이 되는 t 의 개수는? [4점]

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

단답형(22 ~ 30)

22. $\lim_{x\to5}(x^2+1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 네 수 3, a, b, 12가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<1) \\ x+13 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{6n}{n+1}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}(4a_n+3)$의 값을 구하시오. [3점]

26. $1<m<n<7$인 두 자연수 m, n에 대하여 m^n의 세제곱근이 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [4점]

27. 폭약에 의한 수중 폭발이 일어나면 폭발 지점에서 가스버블이 생긴다. 수면으로부터 폭발 지점까지의 깊이가 $D(\mathrm{m})$인 지점에서 무게가 $W(\mathrm{kg})$인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을 $R(\mathrm{m})$라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$R=k\left(\frac{W}{D+10}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ (단, } k\text{는 양의 상수이다.)}$$

수면으로부터 깊이가 $d(\mathrm{m})$인 지점에서 무게가 $160\,\mathrm{kg}$인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을 $R_1(\mathrm{m})$이라 하고, 같은 폭발 지점에서 무게가 $p(\mathrm{kg})$인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경을 $R_2(\mathrm{m})$라 하자.

$\dfrac{R_1}{R_2}=2$일 때, p의 값을 구하시오. (단, 폭약의 종류는 같다.) [4점]

28. 1000의 모든 양의 약수를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 k번째 수를 a_k라 하자. 1000의 모든 양의 약수의 개수는 p이고 $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\log_{10} a_k = q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

29. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 에 대하여 두 실수 a, b 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $ab>0$
(나) $f(a)$, $f(2)$, $f(b)$ 는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$a+25b$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

30. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} kx^2+2kx+2 & (x \geq -2) \\ -3x-4 & (x < -2) \end{cases}, \quad g(x)=-x+a$$

가 있다. 양의 실수 a 에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 모든 실근의 합을 $h(a)$ 라 할 때, 함수 $h(a)$ 가 항상 연속이 되도록 하는 상수 k 의 최솟값을 p 라 하자. $120\times\dfrac{1}{p^2}$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.